FPK Khouribga
Analyse 2

Prof : M. CH-CHAOUI
SMIA S2; 2023

TD 2

Exercice 1 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$1.\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}dt \quad 2.\int_0^{+\infty}\frac{t-5}{t^2+4t+4}dt \quad 3.\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+1}dt.$$

$$4.\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt \qquad 5.\int_0^{+\infty}\frac{2+\ln(t)}{t+4}dt \qquad 6.\int_1^{2}\frac{1}{t^2-t}dt$$

$$7.\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt \qquad 8.\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt \qquad 9.\int_1^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{t^2})dt$$

$$10.\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt \qquad 11.\int_0^{1}\frac{\ln(t)}{t-1}dt \qquad 12.\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt.$$

Exercice 2 Détrminer la nature de

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$$

selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ sont convergentes et opposées (utiliser le changement de variables $u=\frac{1}{t}$).
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$

Exercice 4

1. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx = 0.$$

2. Montrer que l'application f définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$
4. On pose $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

5. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$